КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АЛЬ-ФАРАБИ

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ТЕПЛОФИЗИКИ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

# 3D моделирование физических процессов

## Принцип расщепления

**Лектор: PhD**
**Максимов Валерий Юрьевич**

# ПРИНЦИП РАСЩЕПЛЕНИЯ

Модельное уравнение $$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$ (1)

можно разбить на два уравнения:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$ (2)

- уравнение конвекции

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$ (3)

- уравнение ”диффузии”, или применительно к температуре, уравнение теплопроводности

• Переход от временного слоя n к слою n+1 *выполняется за два «дробных шага». На первом шаге при переходе от* n *к слою* n+1\2 *действует уравнение (2), а на втором шаге* (n+1\2 → n+1) *- уравнение (3). Естественно ожидать, что суммарный эффект двух таких шагов близок к эффекту перехода от* n *к* n+1 по уравнению (1) за 1 шаг.

1. n *к слою* n+1\2

$$\frac{f_i^{n+\frac{1}{2}} - f_i^n}{\Delta t/2} + u\frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

Изменение на пол шага

$$\Rightarrow f_i^{n+\frac{1}{2}} = f_i^n - \frac{C}{2}\left(f_i^n - f_{i-1}^n\right)$$

2. n+1\2 *к слою* n+1

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2} = a\frac{f_{i+1}^{n+1} + f_{i-1}^{n+1} - 2f_i^{n+1}}{\Delta x^2}$$

- Согласно принципу расщепления отдельные члены (или комплексы), входящие в уравнение, можно реализовать поразному на различных промежуточных этапах (шагах).

- Если уравнения дробных шагов описывают частные физические явления (как в нашем примере), то говорят о расщеплении по физическим процессам.

# МЕТОД СПОЛДИНГА

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ

Сначала переход от декартовых переменных *x, y* к переменным $\xi$, $\psi$, где $\xi \equiv x$, а $\psi$ - функция тока.

Перейдем от прямоугольных переменных *x, y* к новым переменным Мизеса ξ,ψ . Здесь $\xi = x$ , а ψ - функция тока, которая определяется из уравнения неразрывности:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \mathrm{v} = -\frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{x}} \qquad (1)$$

Тогда частные производные по координатам будут иметь вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial \xi}-\upsilon\frac{\partial}{\partial \psi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial y}=u\frac{\partial}{\partial \psi} \qquad (2)$$

Используя эти формулы перехода, в новых переменных , уравнение (1) превращается в тождество, а (2) приводится к виду:

$$\Phi\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}-\Phi\upsilon\frac{\partial \Phi}{\partial \psi}+\Phi\upsilon\frac{\partial \Phi}{\partial \psi}=\Phi\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\upsilon\Phi\frac{\partial \Phi}{\partial \psi}\right) \qquad (3)$$

После простых преобразований получим:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\upsilon\Phi\frac{\partial \Phi}{\partial \psi}\right) \qquad (4)$$

Чтобы преодолеть эти трудности, необходимо перейти к другим переменным *x*, $\omega$, где *x* – продольная координата, причем $x=\xi$, $\omega$-безразмерная функция тока, которая определяется следующим образом:

$$\omega = \frac{\psi - \psi_I}{\psi_E - \psi_I}$$

где $\psi_I$, $\psi_E$ - значения функции тока на нижней и верхней границах расчетной области соответственно.

Переменная $\omega$ удобна тем, что ее область изменения всегда лежит в следующих пределах:

$$0 \leq \omega \leq 1,$$

следовательно,

$$\omega_I = 0 \qquad \omega_E = 1$$

Индексы I и E соответствуют нижней и верхней границам расчетной области. В переменных *x*, $\omega$ конечно-разностная сетка всегда автоматически «подстраивается» под расчетную область.

Формулы перехода в данном случае будут иметь следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial \xi}=\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{\upsilon_{I}}{\psi_{E}-\psi_{I}}+\frac{\upsilon_{E}-\upsilon_{I}}{\psi_{E}-\psi_{I}}\right)\frac{\partial}{\partial \omega}$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \psi}+\frac{\partial}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial \psi}=\frac{1}{\psi_{E}-\psi_{I}}\frac{\partial}{\partial \omega}$$

Тогда уравнение (4) в новых переменных x, $\omega$ примет вид:

$$\frac{\partial \hat{O}}{\partial x}+\left(\frac{\upsilon_{I}}{\psi_{E}-\psi_{I}}+\frac{\upsilon_{E}-\upsilon_{I}}{\psi_{E}-\psi_{I}}\omega\right)\frac{\partial \hat{O}}{\partial \omega}=$$

$$=\frac{1}{\psi_{E}-\psi_{I}}\frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{\breve{A}_{\hat{O}}\hat{O}}{\psi_{E}-\psi_{I}}\frac{\partial \hat{O}}{\partial \omega}\right)+\frac{S_{\hat{O}}}{\rho u} \qquad (5)$$

Введем обозначения:

$$a = \frac{\upsilon_I}{\psi_E - \psi_I} \qquad b = \frac{\upsilon_E - \upsilon_I}{\psi_E - \psi_I} \qquad c = \frac{\Gamma_\Phi \Phi}{(\psi_E - \psi_I)^2} \qquad d = \frac{S_\Phi}{\rho u}$$

С учетом введенных обозначений уравнение (5) примет следующий вид:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + (a + b\omega)\frac{\partial \Phi}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega}\left(c\frac{\partial \Phi}{\partial \omega}\right) + d \qquad (6)$$

Решение этого уравнения получается в переменных *x*, $\omega$, а затем по необходимости осуществляется обратный переход от $\omega$ к переменной *y* по следующей формуле:

$$y = \int_o^\omega \frac{\psi_E - \psi_I}{\rho \Phi} d\omega$$

# КОНЕЧНО – РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

Конечно-разностный аналог уравнения (6) получим методом интегрирования по контрольному объему. Для этого выберем следующую двумерную область интегрирования:

$x_i \le x \le x_{i+1}$ , $\omega_{j-1/2} \le \omega \le \omega_{j+1/2}$ (см. рисунок 1).

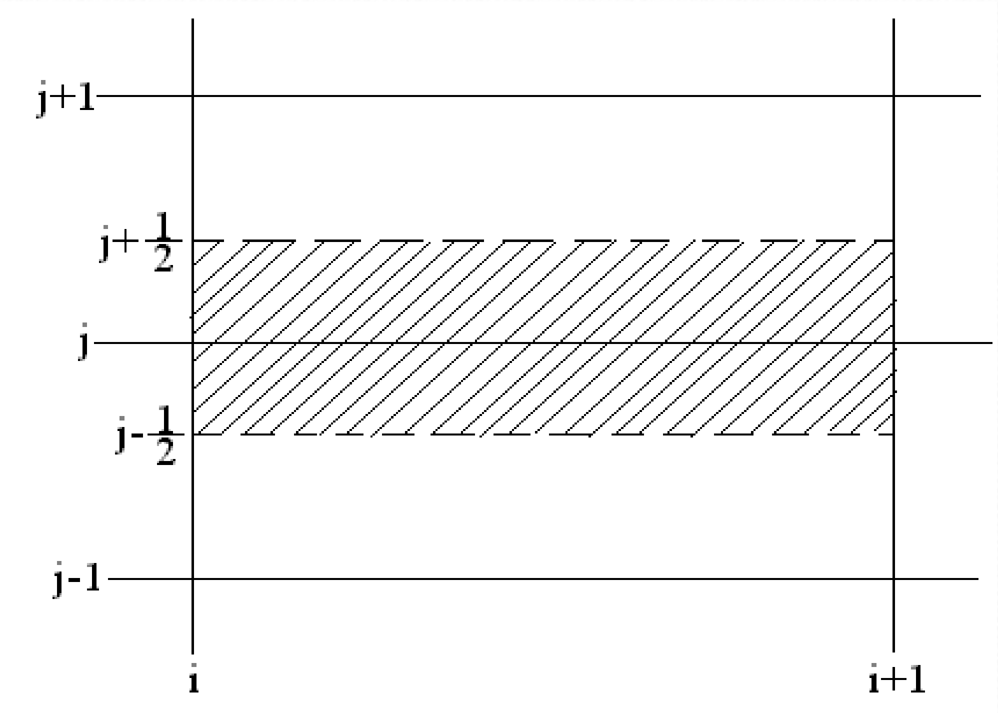


*Рис. 1. Фрагмент конечно-разностной сетки*
*Заштрихованная область – контрольный объем*

Проинтегрируем уравнение (6) от $x_i$ до $x_{i+1}$ и от $\omega_{j-\frac{1}{2}}$ до $\omega_{j+\frac{1}{2}}$

Поскольку x и $\omega$ независимые переменные, то порядок интегрирования не имеет значения:

$$\int_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}\int_{i}^{i+1}\frac{\partial\hat{O}}{\partial x}dx\,d\omega+\int_{i}^{i+1}\int_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}(a+b\omega)\frac{\partial\hat{O}}{\partial\omega}d\omega\,dx=$$

$$=\int_{i}^{i+1}\int_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(c\frac{\partial\hat{O}}{\partial\omega}\right)d\omega\,dx+\int_{i}^{i+1}\int_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}d\,d\omega\,dx \tag{7}$$

Рассмотрим каждый интеграл отдельно, обозначив соответственно через $I_1$, $I_2$, $I_3$, $I_4$

$$I_1 \approx \int_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \left(\Phi_{i+1} - \Phi_i\right) d\omega \approx \left(\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}\right)\Delta\omega \qquad (8)$$

Здесь при интегрировании по $\omega$ была использована теорема о среднем; при этом в качестве средней точки выбрана точка *j* и введено обозначение:

$$\Delta\omega = \omega_{j+\frac{1}{2}} - \omega_{j-\frac{1}{2}}$$

Интеграл, обозначенный $I_2$, проинтегрируем по частям, используя, где необходимо, теорему о среднем. При этом, интегрируя по $\omega$, в качестве средней точки также будем использовать узел *j*, а при интегрировании по *x* обозначим среднюю точку *i**, смысл которого будет пояснен ниже:

$$I_2 = \int_i^{i+1}\int_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} (a+b\omega)\frac{\partial\hat{O}}{\partial\omega}\,d\omega dx = \int_i^{i+1}\left[(a+b\omega)\hat{O}\Big|_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \int_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} b\hat{O}\,d\omega\right]dx \approx$$

$$\approx \int_i^{i+1}\left[(a+b\omega)\Phi_{j+\frac{1}{2}} - \left(a+b\omega_{j-\frac{1}{2}}\right)\Phi_{j-\frac{1}{2}}\right]dx - b_i\int_i^{i+1}(b\Phi)_j\,\Delta\omega dx \approx$$

(9)

$$\approx \left[\left(a+b\omega_{j+\frac{1}{2}}\right)\Phi_{j+\frac{1}{2}}\right]_{i^*}\Delta x - \left[\left(a+b\omega_{j-\frac{1}{2}}\right)\Phi_{j-\frac{1}{2}}\right]_{i^*}\Delta x - (b\Phi)_{i^*,j}\,\Delta\omega\Delta x$$

Для получения линейного конечно-разностного уравнения необходимо, чтобы коэффициенты при неизвестных *Ф* были записаны на известном слое. Поэтому в последних выражениях уравнения (9) коэффициенты при *Ф* запишем в узле *i*, а сами значения *Ф* – в узле *i+1*:

$$I_2 \approx \left( a + b\omega_{j+\frac{1}{2}} \right)_i \Phi_{i+1,j+\frac{1}{2}} \Delta x - \left( a + b\omega_{j-\frac{1}{2}} \right)_i \Phi_{i+1,j-\frac{1}{2}} \Delta x - b_{i,j} \Phi_{i+1,j} \Delta\omega\Delta x \quad (10)$$

Рассмотрим подробнее, чему равно $b_{i,j}$:

$$b_{i,j} = \frac{(\upsilon_E - \upsilon_I)_i}{(\psi_E - \psi_I)_i} = \frac{-1}{(\psi_E - \psi_I)_i} \frac{\partial}{\partial x} (\psi_E - \psi_I) \Big|_i = \frac{-1}{(\psi_E - \psi_I)_i} \frac{(\psi_E - \psi_I)_{i+1} - (\psi_E - \psi_I)_i}{\Delta x} =$$

$$= \frac{-1}{\Delta x} \left[ \frac{(\psi_E - \psi_I)_{i+1}}{(\psi_E - \psi_I)_i} - 1 \right] \quad (11)$$

Из выражения (11) следует, что коэффициент *b* не зависит от поперечной координаты, тогда последнее слагаемое в выражении (10) примет вид:

$$-b_{i,j}\hat{O}_{i+1,j}\Delta\omega\Delta x=\left(\frac{\left(\psi_E-\psi_I\right)_{i+1}}{\left(\psi_E-\psi_I\right)_i}-1\right)\hat{O}_{i+1,j}\Delta\omega$$

С учетом (11) первое и второе слагаемые в выражении (10) будут иметь следующий вид:

$$\left(\mathrm{a}+\mathrm{b}\omega_{\mathrm{j}+\frac{1}{2}}\right)_{\mathrm{i}}\Phi_{\mathrm{i}+1,\mathrm{j}+\frac{1}{2}}\Delta\mathrm{x}=\frac{\upsilon_{\mathrm{i},\mathrm{j}+\frac{1}{2}}}{\left(\psi_{\mathrm{E}}-\psi_{\mathrm{I}}\right)_{\mathrm{i}}}\Phi_{\mathrm{i}+1,\mathrm{j}+\frac{1}{2}}\Delta\mathrm{x}$$

$$\left(\mathrm{a}+\mathrm{b}\omega_{\mathrm{j}-\frac{1}{2}}\right)_{\mathrm{i}}\Phi_{\mathrm{i}+1,\mathrm{j}-\frac{1}{2}}\Delta\mathrm{x}=\frac{\upsilon_{\mathrm{i},\mathrm{j}-\frac{1}{2}}}{\left(\psi_{\mathrm{E}}-\psi_{\mathrm{I}}\right)_{\mathrm{i}}}\Phi_{\mathrm{i}+1,\mathrm{j}-\frac{1}{2}}\Delta\mathrm{x} \qquad (12)$$

Предположив также, что значения *Ф* в «половинных» узлах можно записать, как средние арифметические соседних «целых» узлов:

$$\Phi_{i+1,\, j\pm\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\Phi_{i+1,\, j} + \Phi_{i+1,\, j\pm 1}\right)$$

и используя формулы (12), окончательно конечно-разностная аппроксимация второго интеграла будет выглядеть следующим образом:

$$I_2 \approx \frac{\upsilon_{i,\, j+\frac{1}{2}}}{2\left(\psi_E - \psi_I\right)_i}\left(\Phi_{i+1,\, j} + \Phi_{i+1,\, j+1}\right)\Delta x - \qquad (13)$$

$$- \frac{\upsilon_{i,\, j+\frac{1}{2}}}{2\left(\psi_E - \psi_I\right)_i}\left(\Phi_{i+1,\, j} + \Phi_{i+1,\, j-1}\right)\Delta x + \left[\frac{\left(\psi_E - \psi_I\right)_{i+1}}{\left(\psi_E - \psi_I\right)_i} - 1\right]\Phi_{i+1,\, j}\Delta\omega$$

Для третьего интеграла также используем теорему о среднем и, как и в предыдущем случае, применим метод линеаризации полученного выражения с помощью специального подбора средней точки:

$$I_3 = \int_i^{i+1} \left( c \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right)_{j+\frac{1}{2}} dx - \int_i^{i+1} \left( c \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right)_{j-\frac{1}{2}} dx = \left( c \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right)_{i^*, j+\frac{1}{2}} \Delta x - \left( c \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right)_{i^*, j-\frac{1}{2}} \Delta x$$

Преобразуем полученное выражение и заменим в соответствии с (5) следующим образом:

$$I_3 = \left[ \frac{\Gamma_\phi \Phi}{(\psi_E - \psi_I)^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right]_{i^*, j+\frac{1}{2}} \Delta x - \left[ \frac{\Gamma_\phi \Phi}{(\psi_E - \psi_I)^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right]_{i^*, j-\frac{1}{2}} \Delta x$$

Используем формулу перехода от $y$ к $\omega$ :

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\Phi}{\psi_E - \psi_I} \frac{\partial}{\partial \omega}$$

Тогда

$$I_3 = \left( \frac{\nu}{\psi_E - \psi_I} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{i^*, j+\frac{1}{2}} \Delta x - \left( \frac{\nu}{\psi_E - \psi_I} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{i^*, j-\frac{1}{2}} \Delta x$$

Аппроксимируем значения производных, входящих в последнее выражение, используя для этой цели центральные конечно-разностные соотношения относительно узлов $y_{i+1/2}$ и $y_{i-1/2}$. Кроме того, в целях линеаризации полученного выражения значения *Ф* будут записаны в узле *i+1*, а коэффициенты при них – в узле *i*:

$$I_3 = \frac{\nu_{i,j+\frac{1}{2}}}{\left(\psi_E - \psi_I\right)_i} \frac{\Phi_{i+1,j+1} - \Phi_{i+1,j}}{\Delta y} \Delta x - \frac{\nu_{i,j-\frac{1}{2}}}{\left(\psi_E - \psi_I\right)_i} \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i+1,j-1}}{\Delta y} \Delta x$$

Введем следующие обозначения:

$$\boxed{\frac{\nu_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta y} = T_{i,j+\frac{1}{2}}} \qquad \boxed{\frac{\nu_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} = T_{i,j-\frac{1}{2}},}$$

Таким образом, окончательно получим:

$$I_3 = \frac{\Delta x}{\left(\psi_E - \psi_I\right)_i}\left[T_{i,j+\frac{1}{2}}\left(\Phi_{i+1,j+1} - \Phi_{i+1,j}\right) - T_{i,j-\frac{1}{2}}\left(\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i+1,j-1}\right)\right] \qquad (14)$$

Для последнего интеграла дважды применим теорему о среднем:

$$I_4 \approx d_{i,j}\Delta x \Delta\omega \qquad (15)$$

Соберем теперь все слагаемые (8), (13)-(15) и запишем уравнение (6) в конечно-разностном виде:

$$\left(\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}\right)\Delta\omega + \frac{\upsilon_{i,j+\frac{1}{2}}\Delta x}{2\left(\psi_E - \psi_I\right)_i}\left(\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i+1,j+1}\right) - \frac{1}{2}\upsilon_{i,j-\frac{1}{2}}\frac{\Delta x}{\left(\psi_E - \psi_I\right)_i}\left(\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i+1,j-1}\right) +$$

$$+\left[\frac{\left(\psi_E - \psi_I\right)_{i+1}}{\left(\psi_E - \psi_I\right)_i} - 1\right]\Phi_{i+1,j}\Delta\omega = \frac{\Delta x}{\left(\psi_E - \psi_I\right)_i}\left[T_{i,j+\frac{1}{2}}\left(\Phi_{i+1,j+1} - \Phi_{i+1,j}\right) - T_{i,j-\frac{1}{2}}\left(\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i+1,j} - 1\right)\right] + d_{i,j}\Delta x\Delta\omega \qquad (16)$$

Спасибо за внимание!